Izvorni članak UDK 101.1:19 Bošković

Ivica Martinović, Dubrovnik

Boškovićeva neostvarena teorija infinitezimalâ: između nacrta teorije i primjene metode

Teoriju beskonačno malih veličina ili teoriju neodređenih veličina najavljivao je Ruđer Bošković nekoliko puta, počevši od posljednje rečenice svoje nastupne matematičke rasprave u Rimskom kolegiju 1741. godine pa sve do predgovora njegovu matematičkom udžbeniku 1754. godine i znanstvenog izvješća o određivanju oblika Zemlje 1755. godine.[1] Unatoč tim najavama on je u pismu svom učeniku Francescu Puccinelliju 15. studenoga 1763., a u sklopu prosudbe Eulerova djela *Introductio in analysin infinitorum*, izjavio da više ne može zagospodariti tim matematičkim područjem.[2] Znači li to da je uoči svog izbora za profesora matematike u Pavìi napokon odustao od svoje dugogodišnje nakane da u četvrtom svesku svojih *Elementorum universae matheseos* izloži infinitezimalni račun? On 1763. godine nije više osjećao imperativ da zaokruži svoj matematički udžbenik posljednjim predviđenim sveskom *Elementa infinitorum, & infinitesimorum* jer već od 1760. godine nije ni službeno bio profesorom matematike u Rimskom kolegiju, a odluka Prosvjetnog senata u Milanu, i to aklamacijom, uslijedila je tjedan dana nakon što je Puccinelliju očitovao svoj stav prema infinitezimalnom računu. Tko zna kako je Bošković postupio pri izradi trećeg sveska može naslućivati da bi on, pripremajući prikaz infinitezimalnog računa za svoje slušače, krenuo nekom neutrtom stazom. Pa ipak, iz mnogih se najava četvrtog sveska u razdoblju 1741–1755. mogu izlučiti dragocjene pojedinosti. Tako je moguće prosuditi složenost njezina najavljena sadržaja i utvrditi osnovnu zamisao u izgradnji

1 Rogerius Josephus Boscovich, *De Natura, & usu Infinitorum, & Infinite parvorum* (Romae: Ex Typographia Komarek in Via Cursus, 1741), n. 25, p. 12: »Sed ea fusiorem tractionem requirunt, & integra elementa, quae fortasse dabimus aliquando, si per tempus licebit.«; Rogerius Josephus Boscovich, »Auctoris praefatio«, u Boscovich, *Elementorum universae matheseos tomus I.* (Romae: Typis Generosi Salomoni, 1754), nepag.: »Quarto tomo persequar Elementa infinitorum, & infinitesimorum pure geometrica, ubi etiam de generalibus agam curvarum proprietatibus, & earum, quae omnium maxime, vel utiles, vel notae sunt Elementa tradam.«; Rogerius Josephus Boscovich, »De figura Telluris determinanda ex aequilibrio et ex mensura graduum«, opusculum V. u Christopher Maire et Rogerius Josephus Boscovich, *De litteraria expeditione per Pontificiam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus et corrigendam mappam geographicam* (Romae: In Typographio Palladis/Excudebant Nicolaus, et Marcus Palearini), nn. 1–335, pp. 385–516, u n. 259, p. 483: »ut quarto meorum Elementorum tomo demonstrabo, (...)«.

2 Ruđer Bošković Francescu Puccinelliju, Roma, 15. studenoga 1763., pismo pohranjeno u Archivum Historicum Societatis Iesu u Rimu, *Opera Nostrorum* 89, f. 2r: »Ed ora non sono più in stato da farmene padrone.« Pismo je nedavno i objavljeno u: Ruggiero Giuseppe Boscovich, *Lettere per una storia della scienza (1763–1786)*, a cura di Rita Tolomeo (Roma: Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, 1991), pp. 61–63, na p. 62. Usp. i tumačenja tog pisma u: Željko Marković, *Ruđe Bošković*, dio prvi (Zagreb: JAZU, 1968), pp. 62 i 506; Željko Marković, *Ruđe Bošković*, dio drugi (Zagreb: JAZU, 1969), p. 741.

teorije infinitezimalâ. To znači da je moguće napisati pretpovijest jedne nenapisane teorije.

Ustroj i sadržaj teorije

Infinitesimorum theoria uključena je u Boškovićeve istraživačke planove već u razdoblju bujne izgradnje njegove teorije silâ 1748. godine. On je želio pokazati da »i cjelokupna teorija infinitezimalâ ovisi samo o isključenju skoka«, odnosno da se teorija infinitezimalnih veličina dade utemeljiti pomoću svojstva neprekinutosti funkcije.[3] Motiv koji je nadahnjivao tu Boškovićevu najavu upućuje na sukladnost u strukturi teorije silâ i teorije infinitezimalâ. Kao što je princip neprekinutosti tvorbeni princip Boškovićeve teorije silâ, tako je i neprekinutost krivulje morala biti kamenom temeljcem zamišljene teorije infinitezimalâ.

Teorija infinitezimalâ dobila je 1753. godine dodatni impuls koji je ovog puta uslijedio iz Boškovićeva proučavanja geometrijskih transformacija. U programatskom uvodu u svoju teoriju transformacijâ geometrijskih mjesta on je istaknuo:

»Naići ćemo više puta i na neke tajne beskonačnosti koje narastaju dotle da napokon uvjeravaju u nemogućnost protežne beskonačnosti i vode nas prema teoriji neodređenih veličina, bile one neodređeno male ili neodređeno velike, koju ćemo teoriju razmatrati u drugom radu.«[4]

Doista, teorija transformacijâ geometrijskih mjesta bila je zamišljena kao cjelovito istraživanje neprekinutosti i beskonačnosti u geometriji. Uloga koja je pritom bila pridijeljena beskonačnosti pokrenula je Boškovićevu misao prema novoj teoriji koja tom prilikom dobiva nazivak *indefinitorum theoria*. On je, dakle, upotrijebio izraz koji je uveo Leibniz, a koji sjedinjuje pojmove beskonačno velike i beskonačno male veličine kao oblike očitovanja potencijalne beskonačnosti. U predgovoru trećem svesku svojih *Elementorum universae matheseos* Bošković je ocrtao kratak sadržaj teorije neodređenih veličina u pripremanom četvrtom svesku:

»Uslijedit će drugo [djelo] koje se bavi beskonačno velikim i beskonačno malim [veličinama] koje su za mene neodređene. Rastumačit ću njihovu narav, razvrstati redove, ispredavat ću osnove dokazavši ih geometrijskom strogošću, a od njih ću zakoračiti prema općim svojstvima krivuljâ, šiljcima, prijevojima, beskonačnim granama, dodirima, priljubljivanjima, evolutama, teoriji maksimalnih i minimalnih [vrijednosti]. A razjasnit ću i drugo, te izvesti i dokazati pojedina svojstva posebnih i najkorisnijih krivulja.«[5]

I u kasnijim je raspravama Bošković upozoravao na teme koje će obraditi u svojoj teoriji infinitezimalâ. Te su se teme redovito ticale neprekinutosti i beskonačnosti geometrijskih krivulja. Kad je u raspravi *De continuitatis lege* raspravljao o naravi beskonačnih grana krivuljâ i o njihovoj povezanosti u beskonačnosti, primjerice o naravi parabole, hiperbole, logistike, logaritamske spirale i Nikodemove konhoide, Bošković je bio svjestan da takva istraživanja pripadaju posebnoj matematičkoj disciplini koju je nazvao »geometrija beskonačno malih i beskonačno velikih veličina« (*infinitesimorum et infinitorum Geometria*).[6] I diferencijalna je geometrija trebala, dakle, biti predmetom četvrtog sveska njegovih *Elementorum universae matheseos*.

Poticaji iz primijenjenih istraživanja

Boškovićev interes za teoriju infinitezimalâ podržavala su njegova istraživanja i u drugim znanstvenim područjima. Dva takva poticaja želim ovdje prikazati upravo zbog prešućivanja ove dionice Boškovićeve znanstvene metodologije.

Prvi poticaj potječe iz geodezije. Kad je u znanstvenom izvješću *De litteraria expeditione per Pontificiam ditionem* (1755) određivao oblik Zemlje, Bošković je često uspoređivao geometrijsku i infinitezimalnu metodu, pa je radije primjenjivao geometrijsku metodu. Ipak, glede izbora metode nije bio isključiv. Istražujući Zemljin oblik iz ravnoteže fluida što se okreće oko vlastite osi, istaknuo je prednost elementarnoga infinitezimalnog računa pred geometrijskim dokazima i koristio se infinitezimalnom formulom za subnormalu.[7] A kad je proučavao luk meridijana uz pretpostavku o nejednakoj gustoći Zemlje, raspravljao je o pojmu kružnice oskulacije i, osobito, o anomalnim točkama za koje ne postoji kružnica oskulacije.[8] Napokon, Bošković se bavio općim rješenjem problema kako bi se za zadani niz stupnjeva odredila krivulja meridijana. U tom se povodu, birajući između infinitezimalne i geometrijske metode, odlučio za izlaganje

3
Rogerius Josephus Boscovich, *Dissertationis de lumine pars secunda* (Romae: Typis Antonii de Rubeis in via Seminarii propè Rotundam, 1748), n. 54, p. 23: »Sed ea omnia, & universam hanc theoriam nostram [= virium theoriam] multo diligentius excolemus, & propugnabimus brevi longiore opere, in quo & totam infinitesimorum theoriam a sola exclusione saltus pendere ostendemus, & praecipua mechanicae elementa proferemus nova methodo demonstrata.«

4
Rogerius Josephus Boscovich, »De transformatione locorum geometricorum, ubi de continuitatis lege, ac de quibusdam Infiniti mysteriis«, u Boscovich, *Elementorum universae matheseos tomus III.* (Romae: Typis Generosi Salomoni, 1754), nn. 673–886, pp. 297–468, u n. 759, p. 368: »Occurrent autem identidem quaedam etiam infiniti mysteria, quae eo usque excrescent, ut infiniti extensi impossibilitatem demum suadent, ac ad indefinitorum, sive indefinite parva sint, sive indefinite magna, theoriam, quam alio opere pertractabimus, nos deducent.«

5
Rogerius Josephus Boscovich, »Auctoris praefatio«, u Boscovich, *Elementorum universae matheseos tomus III.* (Romae: Typis Generosi Salomoni, 1754), pp. III–XXVI, na pp. XXV–XXVI: »Consequetur aliud agens de infinitis, & infinite parvis, quae mihi indefinita sunt, quorum natura explicabo, ordines diggeram, elementa tradam geometrico rigore demonstrata, & ex iis ad curvarum generales proprietates gradum faciam, cuspides, flexus contrarios, crura infinita, contactus, oscula, evolutas, maximorum, & minimorum theoriam, atque alia ejusmodi evolvam, ac singulares praecipuarum, & maxime utilium curvarum proprietates deducam, ac demonstrabo.«

6
Rogerius Josephus Boscovich, *De continuitatis lege et ejus consectariis pertinentibus ad prima materiae elementa eorumque vires* (Romae: Ex Typographia Generosi Salomoni, 1754), n. 96, p. 43: »Ea omnia, & alia quamplurima superessent, quae brevis dissertatiunculae [sic!] limitibus coerceri non possunt, persequemur autem uberrime in quarto nostrorum elementorum tomo, quem infinitesimorum, & infinitorum Geometriae, ac curvarum proprietatibus destinavimus.«

7
Vidi, primjerice, slijedeće Boškovićeve stavove u Boscovich, »De figura Telluris determinanda ex aequilibrio et ex mensura graduum«, n. 61, p. 408: »Quoniam tamen id ipsum admodum facile praestari potest ope calculi infinitesimali admodum elementaris, (...)«; n. 62, p. 408: »(...) subnormalis, quae ex formulis elementaribus calculi infinitesimalis, (...), debet esse (–x dx)/dy.«

8
Boscovich, »De figura Telluris determinanda ex aequilibrio et ex mensura graduum«, nn. 258–266, pp. 482–486; osobito n. 259, p. 483: »Porro illud accuratissime per Geometriam demonstrari potest, ut quarto meorum Elementorum tomo demonstrabo, nullum esse arcum curvae cujusvis continuum, in quo non adsint infinita puncta circulum osculatorem habentia, (...)«

konstrukcije na geometrijski način, iako se u analizi problema pozivao na kružnice oskulacije i evolute.[9] S posebnom je pozornošću Bošković proučavao »iregularnost krivulje ravnoteže« (*irregularitas curvae aequilibrii*), ispitujući osobito što se u toj točki događa s kružnicom oskulacije.[10]

Dvije godine nakon toga, kad je na zahtjev bolonjskih akademika i na Papin nalog, priredio sažetak izvješća o mjerenju meridijana Rim–Rimini, on je izričito progovorio o odabiru matematičke metode u svom prikazu teorijskih modela za određivanje Zemljina oblika:

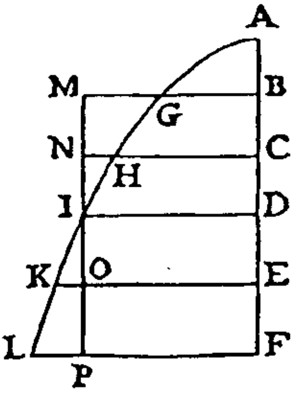
»Prije svega sam nastojao oko toga da iskušam moć geometrije u rješavanju doista teških problema. Niti sam igdje upotrijebio algebarski račun, osim da bih na osnovi geometrijskih rješenja sastavio kratke obrasce, koji na prvi pogled predočuju korist samih rješenja i ravnaju aritmetičkim proračunima, niti sam igdje upotrijebio integralni račun, osim da bih potvrdio sâma geometrijska rješenja.«[11]

Naknadni je pogled, dakle, opisao suodnos geometrije, algebre, aritmetike i integralnog računa donekle drukčije nego što to sadrži sâmo Boškovićevo izvješće.

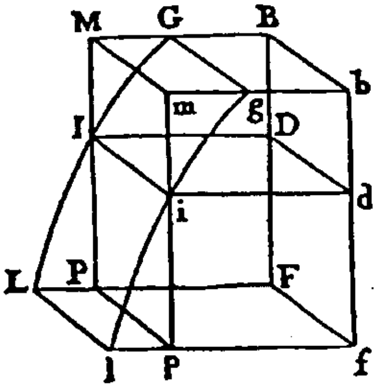
Drugi poticaj za infinitezimalni račun, koji dosad nije bio zapažen, pa nije ni vrednovan, pripada hidromehanici. Na zamolbu Antonija Lecchija Bošković je napisao znanstveno pismo »o načelima na koja se mogu osloniti praktična pravila za mjerenje vodâ koje izlaze kroz otvore i teku koritima«.[12] Boškovićevo je pismo urednički uobličeno kao vodeći članak trećeg dijela Lecchijeve monografije *Idrostatica* (1765), ali ono metodološki odskače od Lecchijeve zamisli premda je nastalo poslije uvida u dotad napisani Lecchijev tekst. To je uvidio i Lecchi jer je posebnom napomenom popratio Boškovićevo pismo:

»U slijedećem članku o tekućicama u koritima upravo izlažem jednu metodu lakšu i brzu, iako unekoliko manje egzaktnu, a koja s pomoću različitih uranjanja kugle daje srednju brzinu. Biram ovu metodu jer je nju lakše shvatiti i onima koji nisu upućeni u višu geometriju, pa kad se upotrebljava s oprezom, o kojem ću izvijestiti, može se reći da je ona također sigurna u praksi.«[13]

Bošković je u pismu Lecchiju obrazložio kako geometrijski predočiti srednju brzinu tekućine: ako se svakoj točki okomice BF, koja pripada presjeku korita ili otvoru posude BbfF, pridruži apsolutna brzina tekućine u toj točki, onda krajevi tih brzina oblikuju neprekinutu krivulju brzinâ GIL (sl. 1 i 2). Tad »postaje jasno da se problem svodi na kvadraturu



Slika 1.
Određivanje srednje brzine tekućine: kvadratura površine ispod neprekinute krivulje brzinâ GIL. Boscovich, »Lettera ... sulli principj, su' quali si possano appoggiare le Regole pratiche per la misura dell' acque, ch' escono dalle aperture, e corrono per gli alvei.«, u Antonio Lecchi, *Idrostatica* (Milano: Marelli, 1765), p. 320.



Slika 2.
Određivanje srednje brzine tekućine koja prolazi presjekom BbfF: izračunavanje obujma ispod neprekinute plohe brzinâ GglL. Boscovich, »Lettera ... sulli principj, su' quali si possano appoggiare le Regole pratiche per la misura dell' acque, ch' escono dalle aperture, e corrono per gli alvei.«, u Antonio Lecchi, *Idrostatica* (Milano: Marelli, 1765), p. 321.

9
Boscovich, »De figura Telluris determinanda ex aequilibrio et ex mensura graduum«, nn. 306–309, pp. 502–504; osobito n. 306, pp. 502–503: »Is quidem generaliter per calculum infinitesimalem proponit generalem solutionem problematis, quo data graduum serie inveniatur curva, (...) Ejusmodi problematis generalis constructionem hic proponam solius Geometriae ope, ut superiora etiam pertractavi, ac ad meam de re tota sententiam, quam primo opusculo proposui post comparationes nonnullas demum delabar.«

10
Boscovich, »De figura Telluris determinanda ex aequilibrio et ex mensura graduum«, n. 322, pp. 509–510.

11
Rogerius Josephus Boscovich, *De literaria expeditione per Pontificiam Ditionem*, posebni otisak iz *De Bononiensi scientiarum et artium Instituto atque Academia Commentarii* 4 (1757), pp. 1–44, na pp. 3–4: »illud autem curavi in primis, ut geometriae vim in difficilium sane problematum solutione experirer; nec usquam algebraico sum usus calculo, nisi ad colligendas ex geometricis solutionibus breves formulas, quae unico obtutu solutionum ipsarum fructum exhiberent, & arithmeticas supputationes dirigerent, nec integrali calculo usquam, nisi ad ipsas geometricas solutiones confirmandas.« Vidi također izdanja: Boscovich, »De litteraria expeditione per Pontificiam Ditionem«, *De Bononiensis scientiarum et artium Instituto atque Academia Commentarii* 4 (1757), pp. 353–396, na p. 355–356; te latinsko-hrvatsko izdanje: Rogerius Josephus Boscovich, »De litteraria expeditione per Pontificiam Ditionem«, latinski tekst uredio i preveo Veljko Gortan, u Nikola Čubranić (ur.), *Geodetski rad Ruđera Boškovića* (Zagreb: Zavod za višu geodeziju AGG fakulteta, 1961), pp 12–99, na p. 18.

12
Vidi sam naslov »Lettera del P. Boscovich sulli principj, su' quali si possano appoggiare le Regole pratiche per la misura dell' acque, ch' escono dalle aperture, e corrono per gli alvei.«, u Antonio Lecchi, *Idrostatica esaminata ne' suoi principj e stabilita nelle sue regole della misura dell'acque correnti* (Milano: Nella Stamperia di Giuseppe Marelli, 1765), pp. 319–345. Usp. prikaz Boškovićeva pisma u Ivica Martinović, »Hidrotehničke ekspertize Ruđera Boškovića«, *Naše more* 40 (1993), pp. 61–75, na pp. 70–71.

13
Lecchi, *Idrostatica*, p. 345: »Nel seguente Articolo io per le acque correnti negli alvei, proporrò appunto un metodo più facile, e spedito, benchè alquanto meno esatto, il quale coll' ajuto delle diverse immersioni della palla, ci dà la velocità media. Io fo scelta di questo metodo, perchè più ad intendersi anche da chi non è inttrodotto nella sublime Geometría; e quando si usi con le cautele, che riferirò, può dirsi sicuro ancora nella pratica.«

površine ispod te krivulje«, zaključuje Bošković.[14] A odnos prema izračunavanju površine ispod krivulje, dakle prema ishodišnom problemu integralnog računa, jasno iskazuje odnos matematičara prema izboru metode. Bošković, profesor matematike na obnovljenom sveučilištu u Pavìi te, 1765. godine, ustvrdio je da se za različite slučajeve krivulje brzinâ, odnosno plohe brzinâ, količina protekle tekućine može uvijek prikazati na dva načina: geometrijski ili integralnim računom. [15] Još je neposredniji on bio u prikazu »općih metoda« (*i metodi generali*) kojima se može prijeći put od geometrijske konstrukcije do brojčane vrijednosti, put koji jamči uporabnu vrijednost postupka:

»Najprije, kad je općenito zadana narav krivulje, njezina se površina [= površina ispod nje] ponekad pronalazi i sâmim geometrijskim metodama, kao što je već Arhimed našao kvadraturu parabole, a općenitije integralnim računom. Nekiput se ova površina točno nađe s konačnim algebarskim izrazom, (...). Češće se događa da se, ne mogavši integrirati formulu, upotrijebe aproksimacije s pomoću redova koji, ako su dostatno konvergentni, daju traženu vrijednost odmah i uz mali trud oko numeričkog računa. A ako redovi konvergiraju sporo ili čak divergiraju, pristoji se okrenuti prema drugim metodama aproksimacije, među kojima je i ona što se naziva *interpolacijom*, koja k tomu služi u slučaju kad općenito nije poznata narav krivulje, nego se vrijednosti mnogih ordinata, koje pripadaju mnogim točkama zadanima na osi, mogu dobiti ili neposrednim opažanjem ili na drugi način.«[16]

Ovaj Boškovićev pregled općih metoda pruža potpuni uvid u matematički instrumentarij epohe, dapače izričito opisuje metode i uvjete uz koje se one primjenjuju: integracija za integrabilne funkcije, aproksimacija beskonačnim konvergentnim redom za neintegrabilne funkcije, interpolacija ako se aproksimacija funkcije ostvaruje divergentnim redom ili ako je funkcija zadana na konačnom skupu. A to znači, premda u pismu nije zašao u pojedinosti, da je Boškovićev odabir metode uistinu suvremen iz perspektive 1765. godine, osobito usporedi li se on s njegovim prijašnjim stajalištima u časopisu bolonjske akademije iz 1757. godine.

Svi izloženi primjeri jasno upućuju na ustroj nenapisane Boškovićeve teorije infinitezimalâ. Ona bi se, nedvojbeno, temeljila na pojmovima neprekinutosti i beskonačnosti kako su oni definirani za geometrijske krivulje. Izlagala bi ona svu građu koju zahtijevaju primjene infinitezimalnog računa u geometriji. Primjene bi svakako sadržavale poglavlja o tangenti i normali krivulje, o određivanju ekstrema i singulariteta krivulje, o kružnici zakrivljenosti i evoluti. U završnom dijelu teorija bi proučavala pojedine važne krivulje. Među te krivulje Bošković bi vrlo vjerojatno uvrstio cikloidu i logistiku za koje je već 1745. godine napisao iscrpne geometrijske prouke.[17] Dio posvećen integralnom računu sadržavao bi, barem iz perspektive 1765. godine, poglavlja o konvergenciji beskonačnih redova, pojmu aproksimacije i metodi interpolacije.

Tri primjene infinitezimalne metode

Premda taj nacrt teorije infinitezimalâ nikad nije ostvaren, to ne znači da se Bošković nije znao poslužiti infinitezimalnom metodom pri rješavanju matematičkih problema. Dapače, neke je probleme uspješno riješio posegnuvši za instrumentarijem infinitezimalnog računa, i to ne u rudimentarnom obliku metode prvih i posljednjih omjera nego u razvijenom obliku uz uporabu diferencijala i integrala. Među njegovim objavljenim rezultatima značenjem se svakako izdvajaju ova tri:

(1) određivanje tijela koje s najvećom privlačnom silom djeluje na odabranu točku svoje osi (1743);

(2) određivanje geometrijskog oblika stanice pčelinjega saća, svedeno na pronalaženje najmanje površine uz zadani obujam (1760);

(3) četiri glavne diferencijalne jednadžbe sferne trigonometrije (1770).[18]

Matematičko iskustvo, koje je stekao rješavajući problem tijela najveće atrakcije, Bošković je sažeo u ovo svjedočanstvo:

»Rješenju problema pristupio sam pomoću posve geometrijske analize, zakratko sam ga dobio prilično lako i bez ikakve pomoći beskonačnih [veličina], te ga priopćio i onima među kojima sam boravio i drugim prijateljima. Isti sam problem istraživao uz pomoć integralnog računa; dugo mi se ukazivao vrlo teškim i gotovo nedostupnim; pa iako sam put kojim sam dospio do rješenja lako uočio, ipak sam ga u tako dugim računskim stranputicama držao zamršenim, te mi je doista pretjeranim izgledao napor da u [infinitezimalnom] računu uz toliko pokušaja nastane ono čemu je gotovo sâma od sebe vodila geometrija. Ipak sam jednom došao do kraja, i to mnogo lakšim i mnogo kraćim putem, ali u kojem su mnogo vrsniji dijelovi iz geometrije nego iz [infinitezimalnog] računa; kao što je dostatno poznato da katkad i u obratnim problemima najviše vrijedi geometrija i jedino se uz njezinu pomoć dobivaju i mnogo

14
Boscovich, »Lettera ... sulli principj«, p. 321: »si vede chiaro, che il problema si riduce alla quadratura dell' area di essa curva;«

15
Boscovich, »Lettera ... sulli principj«, p. 324: »In essi [casi] ad ogni modo si può parimente rappresentare la quantità dell'acqua colla Geometrìa, o col calcolo sommatorio.«

16
Boscovich, »Lettera ... sulli principj«, pp. 325–326: »In primo luogo, quando è data generalmente la natura della curva, si trova la sua area qualche volta anche co' soli metodi geometrici; come Archimede trovò già la quadratura della parabola; e più generalmente col calcolo integrale: la quale area alcuna volta si trova accuratamente con una espressione algebraica finita, (...) Più spesso accade che non potendosi integrare le formole, si adoperino le approssimazioni per via di serie, le quali, se sono assai convergenti, danno presto, e con poco travaglio di calcolo numerico il valore cercato: ma se convergono lentamente, o ancora divergono; conviene rivolgersi ad altri metodi di approssimazione, tra li quali vi è quello, che si chiama delle *Interpollazioni*, il quale serve ancora pel caso, in cui non sia cognita generalmente la natura della curva, ma si possano avere o per immediata osservazione, o in altro modo i valori di molte ordinate corrispondenti a molti punti dati dell' asse.« Kurziv je Boškovićev.

17
Rogerius Josephus Boscovich, »De cycloide et logistica«, u *Andreae Tacquet Societatis Jesu trigonometria plana nec non* trigonometria sphaerica Rogerii Boscovich ejusdem Societatis Jesu, et sectiones conicae Guidonis Grandi cum amplissimis annotationibus, & additamentis Octaviani Cameti, Tomus secundus (Romae: Typis Hieronymi Mainardi in Platea Agonali, 1745), pp. 173–226, i to »De cycloide«, nn. 1–35, a »De logistica«, nn. 1–70.

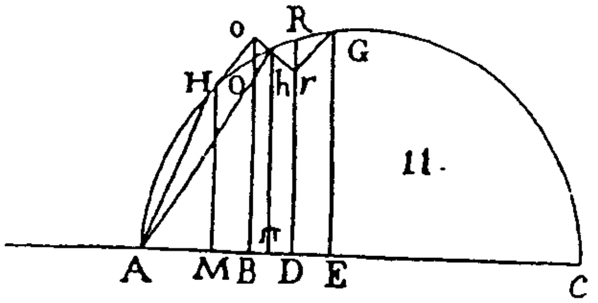
18
Ta sam tri rezultata uvrstio u kronologiju 13 najznačajnijih Boškovićevih matematičkih dostignuća koju sam izložio na simpoziju »Historiography and the History of Mathematics« što ga je organizirala International Commision on the History of Mathematics. Vidi Ivica Martinović, »The genesis of Bošković's contributions to mathematics«, u Fritz Krafft and Christoph J. Scriba (eds), *XVIIIth International Congress of History of Science, 1st – 9th August 1989, Hamburg/Munich: Abstracts* (Hamburg: International Union of the History and Philosophy of Science / Division of History of Science, 1989), M2–13.

lakša i mnogo elegantnija rješenja. Jedno i drugo [rješenje] ovdje ću izložiti istim redom kojim su dobivena.«[19]

Bilo bi ipak pogrešno samo na osnovi ovog iskaza zaključiti koju je matematičku metodu Bošković općenito držao učinkovitijom. U raspravi *Problema mecanicum de solido maximae attractionis solutum* (*Riješen mehanički problem tijela s najvećom privlačnom silom*) on je poslije polaznih teorijskih razmatranja postavio i riješio niz srodnih problemâ, pa je uz svaki od njih vagao kojom se metodom postiže elegantnije rješenje: geometrijskom sintezom (*per synthesim geometricam*) ili infinitezimalnim računom (*ope calculi*).[20] Među tim problemima bila je i pomoćna zadaća koja je sadržavala uvjet da obujam tijela nastaloga vrtnjom bude jednak unaprijed zadanom obujmu jedne kugle. Prilikom rješavanja te zadaće Bošković je dao prednost infinitezimalnom računu:

»Što se tiče metode definiranja osi AC tako da tijelo HMC sadrži danu tvar, elegantnije nego u *lemi* 5 [= geometrijskom metodom uz uporabu razmjera] biva uz pomoć [infinitezimalnog] računa.«[21]

Predloženi glavni problem riješio je prvo geometrijski, a potom analitički (sl. 3).[22] Geometrijsko rješenje vrijedi i za nepravilna tijela, dok se



Slika 3.
Problem tijela koje najvećom privlačnom silom djeluje na točku A svoje osi: analitičko rješenje za tijelo nastalo vrtnjom krivulje AHC oko osi AC. Boscovich, »Problema mecanicum de solido maximae attractionis solutum«, *Memorie sopra la Fisica e Istoria Naturale di Diversi Valentuomini* 1 (Lucca, 1743), fig. 11.

analitičko rješenje može postići samo za tijela koja nastaju vrtnjom oko osi, jer se to potonje rješenje poziva na Guldinovo pravilo za rotacijska tijela. Odatle slijedi Boškovićev odmjereni zaključak u posljednjoj rečenici rasprave:

»Takva je pak narav problema da se, izgleda, zahtijeva radije geometrija nego [infinitezimalni] račun.«[23]

Prema tom zaključku mladoga rimskog profesora Boškovića 1743. godine, matematički problem treba pokušati riješiti objema metodama, a narav problema određuje koja od njih ima prednost. To je, nedvojbeno, objektivnija prosudba od svjedočanstva na početku rasprave jer ne počiva na iskustvenim dojmovima do kojeg je rješenja Boškoviću bilo lakše ili teže doći.

Usporedna potraga za geometrijskim i analitičkim rješenjem istoga problema određuje i Boškovićev pristup matematičkom opisu stanice pčelinjega saća. Taj je njegov matematički prinos nastao tijekom boravka u Parizu u razdoblju od 31. ožujka do 6. travnja 1760., što potkrepljuje prepiska s bratom Barom,[24] a objavljen je pod naslovom *De apium cellulis* (*O stanicama pčelâ*) kao posljednji Boškovićev dodatak uz drugi svezak Stayeva prirodoznanstvenoga spjeva.[25] Trebalo je matematički provjeriti Réaumurovu pretpostavku da stanica pčelinjega saća među tijelima jednakog obujma ima najmanje oplošje, a to znači da pčele grade stanice uz najmanji utrošak voska, te egzaktno rješenje usporediti s Maraldijevim mjerenjima, predočenima Akademiji u Parizu. Pčelinja je stanica, kako je to izložio Réaumur u svom znamenitom djelu o kukcima 1740. godine, prizmatična tvorevina kojoj je donja osnovica šesterokut, dakle lik koji među likovima jednaka opsega ima najveću površinu, a pobočke su joj trapezi, dok gornju

19
Rogerius Josephus Boscovich, »Problema mecanicum de solido maximae attractionis solutum«, *Memorie sopra la Fisica e Istoria Naturale di Diversi Valentuomini* 1 (Lucca, 1743), pp. 63–88, figg. 1–11, na p. 66: »Ejus solutionem aggressus per analysim pure geometricam, brevi sum assecutus satis expeditam, & sine ullo infinitorum subsidio, quam & cum iis, qui inter fuerant, & cum aliis amicis communicavi. Idem problema cum calculointegrali tentarem; diu se mihi maxime arduum praebuit, ac penè inaccessum; at licet viam, qua ad solutionem pervaderem facilè viderem; videbam tamen ita longis implexam calculorum ambagibus, ut improbus sanè videretur labor, eo per calculum eniti tantis conatibus, quo me sponte propemodum duxisset Geometria. Pervasi tamen aliquando multo & faciliore via & breviore, sed in qua etiam longe potiores Geometriae sunt partes, quam calculi; ut illud satis constet, nonnunquam in inversis quoque problematis valere plurimum Geometriam, ejusque unius ope multo & faciliores & elegantiores solutiones obvenire. Utramque hic attexam eodem ordine quo inventae sunt.«

20
Boscovich, »Problema mecanicum«, p. 68: »Ea autem omnia, & totius problematis constructio sic expedientur per synthesim geometricam«; p. 76, Scholium: »Mirum quantum prodest hasce curvarum transformationes adnotare, per quas non minus Geometria, quam calculus, sibi semper constans, inclamat quodammodo, & obtrudit (...)«; p. 81, Scholium: »elegantius (...) ope calculi«.

21
Boscovich, »Problema mecanicum«, p. 81: »Quae pertinent ad metodum definiendi axem AC ita, ut solidum HMC contineat materiam datam elegantius quam in *Lem.* 5 [ope Geometriae] habentur ope calculi.«

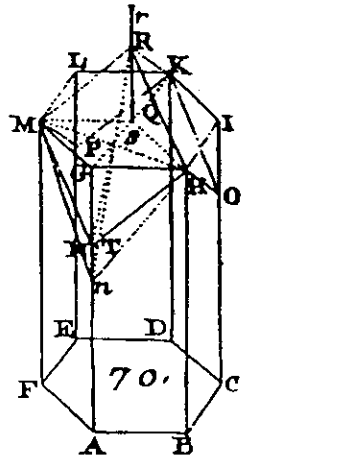
22
Vidi »Solutio [geometrica] problematis propositi« u Boscovich, »Problema mecanicum«, pp. 78–83; te »Ejusdem problematis solutio analytica«, pp. 83–87.

23
Boscovich, »Problema mecanicum«, p. 88: »Ejusmodi est autem problematis natura, ut geometriam potius videatur requirere quam calculum.«

24
Usporedi pismo Ruđera Boškovića Baru Boškoviću, Paris, 31. ožujka 1760., br. 29, u Željko Marković (ur.), »Boškovićev put u Francusku g. 1759./60.«, u *Građa za život i rad Rudžera* Boškovića 2 (Zagreb: JAZU, 1957), pp. 124–126, na p. 124: »In questi foglietti [per D. Beno] vi e quasi tutto il residuo, mancando solamente l'affar delle api, che e corto.«; pismo Ruđera Boškovića Baru Boškoviću, Paris, 6. travnja 1760., br. 30, u Marković, »Boškovićev put u Francusku g. 1759./60.«, pp. 126–130, na p. 127: »Vi accludo un piego per D. Beno, in cui vi è il fine di tutto.«

25
Rogerius Josephus Boscovich, »De apium cellulis«, supplementum 6. ad librum sextum, u Benedictus Stay, *Philosophiae recentioris ... versibus traditae libri X*, Tomus secundus (Romae: Typis, et sumptibus Nicolai et Marci Palearini, 1760), nn. 656–680, pp. 498–504, figg. 67–71.

osnovicu tvore tri jednaka romba (sl. 4). Oplošje stanice sastoji se, dakle, od šest trapeza i tri romba, a problem pronalaženja najmanjeg oplošja



$$6ab - 3ax + 3\sqrt{3aaxx + \tfrac{1}{4}a^4}.$$

Slika 4.
Oplošje stanice pčelinjega saća. Boscovich, »De apium cellulis«, u Benedictus Stay, *Philosophiae recentioris ... versibus traditae libri X*, Tomus II. (Romae: Pagliarini, 1760), Tab. III., fig. 70.
Boškovićeva funkcija utroška voska u gradnji pčelinjega saća: određivanje minimuma diferencijalnom metodom. Boscovich, »De apium cellulis«, u Benedictus Stay, *Philosophiae recentioris ... versibus traditae libri X*, Tomus II. (Romae: Pagliarini, 1760), n. 680, p. 503.

takva tijela svodi se na određivanje oblika romba. Suočen s tako oblikovanim zadatkom, Bošković je još jednom prvo potražio geometrijsko, pa tek onda analitičko rješenje. [26] U sklopu analitičkog pristupa on je oplošje stanice pčelinjega saća prikazao kao funkciju razlike među osnovicama trapeza, odnosno među usporednim stranicama pobočke:

$$f(x) = 6ab - 3ax + 3\sqrt{a^2x^2 + (3/4)\,a^4}$$

gdje su:

a = AB = GH stranica šesterokuta,

b = AG duža osnovica trapeza,

x = GN = AG – AN razlika među osnovicama trapeza,

da bi uz pomoć diferencijalnoga računa ustanovio da oplošje postiže najmanju vrijednost za:

$$x = a/\sqrt{8}.$$

Da je i tom prilikom Bošković prosuđivao koje je rješenje bolje i elegantnije, potvrđuje više istančanih iskaza. Prije negoli je započeo s izlaganjem oba svoja rješenja, on je ustvrdio:

»Uistinu, i rješenje je problema posve lako, bilo da se upotrijebi [infinitezimalni] račun, bilo i sâma geometrija, a određivanje romba i njegovih kutova postaje posve jednostavnim i elegantnim.«[27]

Poslije geometrijskog, a prije analitičkog rješenja, njegova je prosudba glasila:

»Ovdje ću dodati samo ovo: ako se postupi po uobičajenoj analitičkoj metodi, još uvijek je rješenje posve lako i dobiva se isti ishod.«[28]

Riješivši problem u sklopu diferencijalnog računa, Bošković je dobiveni ishod nužno morao geometrijski protumačiti zbog geometrijske naravi postavljenog problema. Ta mu je prigoda omogućila zaključnu usporedbu dviju metoda:

»Uistinu, geometrija sáma neposredno je povela onamo kamo računi nisu bili vodili, (...) A često se pak događa, upravo u takvim posve jednostavnim problemima, da geometrija daje jednostavnije i elegantnije ishode nego [infinitezimalni] račun. Ovdje, ipak, račun daje kutove trapezâ dostatno lako.«[29]

Boškovićeva prosudba o tome kojoj od dviju matematičkih metoda dati prednost, vrlo je odmjerena. Geometrijski dokaz odlikuje se neposrednošću, a to ovdje znači zornošću kakvu Bošković ne može prepoznati u postupcima infinitezimalnog računa. Glede MacLaurinova rješenja istog problema, što ga on nije imao prilike upoznati, on dodaje da geometrijsko rješenje ne može promašiti »što se tiče ili jednostavnosti rješenja, ili prožimanja i povezivanja posljedicâ«.[30] Ali i rješenju unutar diferencijalnog računa Bošković priznaje uobičajenost i lakoću.

Napokon, i treće Boškovićevo dostignuće, ono iz sferne trigonometrije, uključuje usporedbu geometrijske i infinitezimalne metode. U sklopu projekta verifikacije astronomskih instrumenata, što ga je zamislio i provodio kao ravnatelj zvjezdarnice u Breri, Bošković je proučavao diferencijalne promjene sfernog trokuta i sveo ih na četiri jednadžbe u kojima se diferencijalna promjena jedne veličine povezuje s diferencijalnim promjenama

26
Vidi geometrijsko rješenje u Boscovich, »De apium cellulis«, nn. 667–670, pp. 500–501; te analitičko rješenje u Boscovich, »De apium cellulis«, n. 680, pp. 503–504.

27
Boscovich, »De apium cellulis«, n. 666, p. 500: »verum & problematis solutio est admodum expedita, sive adhibeatur calculus, sive etiam solo Geometria, & determinatio rhombi, atque angulorum provenit admodum simplex, & elegans, (...)«

28
Boscovich, »De apium cellulis«, n. 679, p. 503: »Illud tantummodo hìc addam, si analytica usitata methodo sit procedendum, adhuc admodum expeditam solutionem esse, & eandem determinationem obvenire.«

29
Boscovich, »De apium cellulis«, n. 680, p. 504: »Verum Geometria ipsa immediatè eo deduxit, quo calculis non deduxisset, (...) Et quidem saepe accidit, potissimum in hujusmodi problematis admodum simplicibus, ut Geometria simpliciores, & elegantiores determinationes exhibeat, quam calculus. Hìc tamen calculus angulos trapeziorum satis expedite exhibet:«

30
Boscovich, »De apium cellulis«, n. 679, p. 503: »quod aut ad simplicitatem solutionum, aut ad penetrationem, & combinationes consectariorum pertineat«.

bilo koje tri ostale veličine trokuta.[31] Te su jednadžbe s pravom ponijele naziv *četiri glavne diferencijalne jednadžbe sferne trigonometrije* (sl. 5). Izveo

322 TOMUS IV.

14. COMBINAISONS.

I. Les trois côtés avec un angle . . . . x, y, z, p
II. Deux côtés avec deux angles dont un intercepté x, y, p, r
III. Deux côtés avec deux angles opposés . . . . x, y, p, q
IV. Les trois angles avec un côté . . . . y, p, q, r

15. ÉQUATIONS GÉNÉRALES.

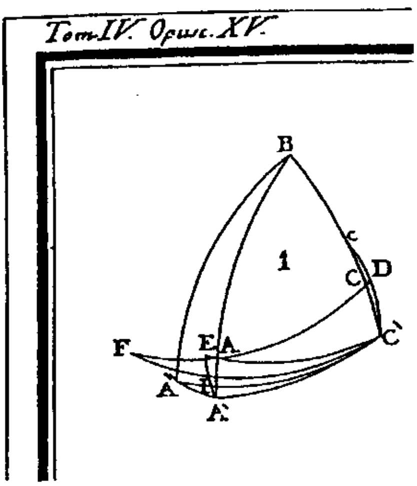
I. . . $dx - dy\cos.r - dz\cos.q - dp\sin.z\sin.q = 0$
II. . . $dx\sin.q - dy\cos.z\sin.p - dp\sin.z - dr\sin.x\cos.q = 0$
III. . . $dx\cot.x - dy\cot.y - dp\cot.p + dq\cot.q = 0$
IV. . . $dx\sin.r\sin.y - dp - dq\cos.x - dr\cos.y = 0$

Slika 5.
Četiri glavne diferencijalne jednadžbe sferne trigonometrije iz 1770. godine. Boscovich, »Des formules differentielles de Trigonométrie«, u Boscovich, *Opera pertinentia ad opticam et astronomiam*, Tomus IV. (Bassani: Remondini, 1785), nn. 14–15, na p. 322.

ih je oko 1770. godine, kako je to posvjedočio u proslovu francuske inačice svoje rasprave *Des formules differentielles de Trigonométrie* (*O diferencijalnim formulama u trigonometriji*):

»O ovom sam predmetu bio napisao četiri djelca na latinskom. U njima su se izlagale različite metode, od kojih su me pojedine bile vodile prema istim četirima glavnim jednadžbama koje međusobno povezuju sve neznatne [= beskonačno male], uzajamno ovisne promjene što mogu nastupiti za stranice i kutove sfernih trokuta, a koje sam promjene bio prenio i na ravne trokute. Jedno od ovih djelcâ bio sam iz Italije poslao Kraljevskoj akademiji znanosti u Parizu otprilike prije 15 godina, a ona ga je odlučila tiskati.«[32]

Po dolasku u Pariz, a poslije raspri s Laplaceom i Rochonom u razdoblju 1776–1777., Bošković je, nažalost, povukao i ove rasprave koje su bile prihvaćene za tisak u izdanju Académie des Sciences, ali ih je ipak objavio u zborniku svojih neizdanih optičkih i astronomskih radova *Opera pertinentia ad opticam et astronomiam*. Glavne jednadžbe sferne trigonometrije potanko je dokazao u raspravi *Des formules differentielles de Trigonométrie*, kako na osnovi elementarnih geometrijskih razmatranja, primjerice razmatranjem trokuta A'BC' koji nastaje diferencijalnom promjenom veličinâ trokuta ABC (sl. 6), tako i diferenciranjem odabranih relacija za sferni trokut.[33] Jednadžbe je uspješno primijenio na izabrane astronomske probleme u ovoj, ali i u kasnijim raspravama. Tako i ovaj Boškovićev korak potvrđuje ono što je znano od Ptolemejeva *Almagesta*: da se sferna trigonometrija razvija u službi astronomskih istraživanja, neovisno o ravnoj trigonometriji i čak prije nje.



Slika 6.
Elementarna geometrijska razmatranja o diferencijalnim promjenama veličinâ u sfernom trokutu ABC. Boscovich, »Des formules differentielles de Trigonométrie«, u Boscovich, *Opera pertinentia ad opticam et astronomiam*, Tomus IV. (Bassani: Remondini, 1785), Opusc. XV., fig. 1.

Svoje diferencijalne jednadžbe prikazao je i primijenio nakon dvije godine raspravljajući o verifikaciji paralaktičkog stroja:

»Ovo sam djelce bio poslao iz Italije Akademiji u Parizu početkom 1772. godine, a ona ga je bila odlučila tiskati jer su ga odobrili za tiskanje veoma slavni akademici La Lande i Cassini sin. (...) Odlučio sam ga objaviti kako je onda [= 1772.] bilo određeno za tisak, bez bilo kakve promjene zadržavajući i izričaj svojih diferencijalnih jednadžaba koje se tiču sferne trigonometrije, (...)«[34]

31
Rogerius Josephus Boscovich, »De formulis differentialibus Trigonometriae / Des formules differentielles de Trigonométrie« (naslov i predgovor na latinskom, tekst na francuskom), u Rogerius Josephus Boscovich, *Opera pertinentia ad opticam et* astronomiam maxima ex parte nova et omnia hucusque inedita in quinque tomos distributa, Tomus quartus, Opusculum XV. (Bassani: Remondini, 1785), pp. 315–394, u n. 15, p. 322.

32
Boscovich, »De formulis differentialibus Trigonometriae«, p. 315: »Quatuor ego Opuscula de hoc argumento Latine conscripseram, in quibus diversae methodi exponebantur, quarum singulae me deduxerant ad easdem quatuor aequationes generales, quae inter se connectunt omnes exiguas variationes, quae possunt accidere lateribus, & angulis triangulorum sphaericorum, pandentes a se invicem, quas etiam ad triangula plana transtuleram. Eorum Opusculorum unum transmiseram ex Italia ad Regiam Parisiensem Scientiarum Academiam ante hos circiter quindecim annos, quod ipsa destinaverat typis.«

33
Vidi izvode prvih dviju glavnih jednadžaba uz primjenu infinitezimalne metode u Boscovich, »De formulis differentialibus Trigonometriae«, u poglavljima: »Première équation trouvée par la seconde méthode«, pp. 328–329; »Seconde équation trouvée par la seconde méthode«, pp. 329–331.

34
Rogerius Josephus Boscovich, »De verificatione machinae parallacticae«, u Boscovich, *Opera pertinentia ad opticam et* astronomiam, Tomus quartus, Opusculum XIV., pp. 284–314, u »Praefatio«, n. I., p. 284: »Hoc ego Opusculum transmiseram ex Italia ad Academiam Parisiensem ineunte anno 1772, quod ipsa destinaverat typis, approbatum pro impressione a celeberrimis Academicis de La-Lande, & Cassino filio. (...) Hoc edendum censui, uti fuerat tum typis destinatum, sine mutatione ulla retinendo etiam enunciationem mearum formularum differentialium pertinentium ad Trigonometriam sphaericam, (...)« Glavne su jednadžbe napisane u n. 17, p. 291.

Uz to, rasprava nameće i procjenu o primjerenu odabiru metode, kad već sadrži rješenja istog problema uz pomoć jednostavne sferne trigonometrije i s pomoću diferencijalnih trigonometrijskih formula.[35] Govoreći o rješenju unutar jednostavne sferne trigonometrije, dakle trigonometrije koja ne poznaje diferencijalne promjene za veličine sfernog trokuta, Bošković je izrekao ove dvije ocjene:

»Ovo je rješenje točno, ali tegobno zbog rješavanja tolikih trokuta. Zato ćemo objelodaniti drugo rješenje koje dovršuje stvar malo kraćom metodom.«[36]

»Da bi se riješio isti problem, može se zato upotrijebiti diferencijalna metoda trigonometrije koja dovršuje stvar s manjom pripravom trokutâ.«[37]

Utemeljitelj zvjezdarnice u Breri, potaknut nizom astronomskih problema, držao je počevši od 1770. godine da se u sfernoj trigonometriji jednostavnije dolazi do rješenja uporabom diferencijalne metode. Mjerilo »lakoće« i »tegobnosti« računskog postupka, na koje se Bošković tako rado pozivao, prvi je put prevagnulo u korist diferencijalne metode.

»Moć više analize«

Prekretnica u Boškovićevim stajalištima glede odabira matematičke metode nastupila je u vrijeme njegovih predavanja iz matematike na Sveučilištu u Pavìi, a zabilježena je u znanstvenoj prepisci s Antonom Marijom Lorgnom tijekom 1768. godine. Proučavanje te kasne prepiske utire put novim spoznajama o Boškoviću matematičaru, kako su već upozorili U. Baldini i P. Nastasi, priređivači prepiske Bošković – Lorgna, te F. A. Homann u sintetičkom prikazu o Boškovićevoj filozofiji matematike.[38]

Početkom mjeseca veljače 1768. godine Bošković je u rukopisu pročitao Lorgnin članak *De locis planetarum in orbitis ellypticis*, dok je Lorgna još pripremao za tisak *Opuscula mathematica et physica* (1770), pa je u pismu, uz ostale primjedbe, iskazao i svoj stav spram Lorgnina odabira geometrijske metode o obradi čuvenog Keplerova problema:

»Vrlo mi se svidjela jasnoća i strogost Vaše sinteze koju i ja nadasve volim, te pronalazim da je mnogo puta prikladna postići elegantnija, očitija i točna rješenja. Ali se ne može prešutjeti da njezine moći zaostaju jedan korak spram moći modernih metoda, a osobito više analize.«[39]

No, tek je objavljeni Lorgnin zbornik *Opuscula tria ad res mathematicas pertinentia* (1767) odlučno potaknuo Boškovića na propitivanje matematičke metode. Odmah po primitku Lorgnina djela u travnju 1768. godine, Boškovićevu je pozornost privukao članak *De cissoide quadam a Dioclea diversa*, o kojem je u razdoblju od 26. travnja do 24. svibnja poslao Lorgni pet pisama. Prvi je dojam o Lorgninoj cisoidi Bošković sažeo u riječi:

»Vaša cisoida ima elegantna svojstva, a mnoga od njih mogu se lako odrediti i sintetički.«[40]

Pritom je geometrijskom metodom izložio konstrukciju tangente u točki cisoide, te pridodao da bi se zakrivljenost u bilo kojoj točki krivulje i drugi pripadni podaci za krivulju mogli potražiti »i sa sâmom geometrijskom analizom, i uporabom beskonačno malih veličina« (*anche colla sola analisi geometrica, ed uso degli infinitamente piccoli*).[41]

Poslije ponovnog i pomnog čitanja Lorgnina članka o cisoidi Bošković je razmatrao odnos između složenosti problema i elegancije rješenja, te pojasnio da se moć infinitezimalne metode očituje u rješavanju složenijih i općenitijih problema:

»[Geometrijska] sinteza daje elegantnije stvari [= ishode] ako je predmet istraživanja jednostavan, ali je [infinitezimalni] račun mnogo općenitiji, i k tomu, kad je dobro upotrijebljen, postiže istu eleganciju.« [42]

Uporedo s evolucijom stajalištâ o primjerenu odabiru matematičke metode, Bošković je sastavljao, pa Lorgni u dijelovima slao svoj spis o cisoidi, što ga je u prepisci naslovio *Memorietta*. U tom se spisu on nije poslužio samo jednom metodom. U prvom dijelu *Memoriette* konstruirao je tangentu u točki krivulje i izračunao polumjer kružnice zakrivljenosti uporabom geometrijskih omjera, odnosno, kako se sâm izrazio, koristeći se »jednostavnom geometrijskom analizom« i »geometrijom u ravnini«, dok je u drugom dijelu izračunao površinu ispod krivulje i dužinu njezina luka uporabom tehnikâ infinitezimalnog računa.[43] U pismu Lorgni popratio je »infinitezimalni« dio *Memoriette* razmatranjem o eleganciji u matematičkom dokazu:

35
Dostatno je usporediti podnaslove u Boscovich, »De verificatione machinae parallacticae«: »Determinatio ejusdem sine usu ejus divisionis per simplicem Trigonometriae sphaericam.«, pp. 289–290; »Determinatio eadem ex iisdem datis per formulas trigonometricas differentiales.«, pp. 290–293.

36
Boscovich, »De verificatione machinae parallacticae«, n. 14, p. 290: »Haec solutio [= solutio per simplicem Trigonometriam sphaericam] est accurata, sed molesta ob resolutionem tot triangulorum. Hinc proferemus aliam, quae rem perficiat methodo paullo breviore.«

37
Boscovich, »De verificatione machinae parallacticae«, n. 15, p. 290: »Hinc adhiberi potest ad solvendum idem problema methodus differentialis Trigonometriae, quae rem perficiet cum minore triangulorum apparatu.«

38
Ugo Baldini – Pietro Nastasi, »Introduzione«, u Ruggiero Giuseppe Boscovich, *Lettere ad Anton Maria Lorgna 1765–1785*, a cura di Ugo Baldini e Pietro Nastasi (Roma: Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, 1988), pp. 11–28, na pp. 17–20; Frederick A. Homann, »Boscovich's philosophy of mathematics«, *Synthesis philosophica* 4 (1989), pp. 557–572, na pp. 562–563; Frederick A. Homann, »Boškovićeva filozofija matematike«, *Filozofska istraživanja* 9 (1989), pp. 1511–1524, na p. 1516.

39
Ruđer Bošković Antonu Mariji Lorgni, Pavìa, 8. veljača 1768., u Boscovich, *Lettere ad Anton Maria Lorgna 1765–1785*, pp. 34–41, na p. 36: »Mi è piaciuta molto la nitidezza, e rigore della sua sintesi, la quale anch'io amo sommamente, e trovo idonea molte volte a dare delle soluzioni più eleganti, più luminose, e precise; ma non si può dissimulare, che le sue forze restano un pezzo indietro rispetto a quelle de' metodi moderni, e massime dell'analisi sublime.«

40
Ruđer Bošković Antonu Mariji Lorgni, Pavìa, 26. travnja 1768., u Boscovich, *Lettere ad Anton Maria Lorgna 1765–1785*, pp. 42–45, na p. 42: »La sua Cissoide ha delle eleganti proprietà, e molte si possono determinar facilmente anche sinteticamente.«

41
Ruđer Bošković Antonu Mariji Lorgni, Pavìa, 26. travnja 1768., u Boscovich, *Lettere ad Anton Maria Lorgna 1765–1785*, p. 44.

42
Ruđer Bošković Antonu Mariji Lorgni, Pavìa, 17. svibnja 1768., u Boscovich, *Lettere ad Anton Maria Lorgna 1765–1785*, pp. 50–54, na p. 50: »La sintesi da delle cose piu eleganti, ove l'oggetto della ricerca è semplice, ma il calcolo è molto piu universale, ed ancor esso, quando sia bene maneggiato arriva alle eleganze medesime.«

43
Prvi, geometrijski dio uključuje Ruggiero Giuseppe Boscovich, »Memorietta«, u Boscovich, *Lettere ad Anton Maria Lorgna 1765–1785*, nn. 1–38, pp. 56–64, osobito n. 7, p. 59: »anche colla semplice analisi geometrica«; n. 22, pp. 60–63: »colla geometria piana«; a drugi, infinitezimalni dio uključuje Boscovich, »Memorietta«, nn. 39–81, pp. 66–71.

»Kraj *Memoriette* sadrži kvadraturu i rektifikaciju. Osobito je ova druga obrađena sredstvima [infinitezimalnog] računa. Ali ćete vidjeti koliko geometrija pomaže da se odmah dospije do jednostavnih formulica i da se one upotrijebe u analizi, vidjet ćete koliko ima koristi odatle dobiti elegantne konstrukcije. Ova je elegancija ona koja mi se nadasve sviđa u geometrijskim stvarima, a koja se danas zanemaruje možda previše i ne s pravom. Primijenio sam je u ovoj raspravici jer mi može poslužiti da vježbam svoje učenike u ovoj eleganciji.«[44]

Opisujući ulogu geometrijske metode u obradi cisoide, Bošković kao da je zaboravio kako je još prije tri mjeseca Lorgnu upozoravao da geometrijska metoda zaostaje za infinitezimalnom. Mjerilo koje je sad izričito postavio u prvi plan bilo je mjerilo »elegancije«, imanentno geometrijskom pristupu. Umijeću elegancije htio je, naime, poučiti i svoje studente. Štoviše, prepisku s Lorgnom, uključujući *Memoriettu*, doživljavao je kao svojevrsnu privatnu školu u kojoj se na temeljnim geometrijskim i analitičkim pojmovima brusi krajnja elegancija, jer se tako izrazio u pismu Giovanu Stefanu Contiju s nadnevkom 22. svibnja 1768.[45]

Uz to, završni dio *Memoriette* osvjetljava Boškovićev odnos prema Vincenzu Riccatiju, vodećem analitičaru onoga doba u Italiji i ujedno njegovu redovničkom subratu. Rektifikacija tj. izračunavanje dužine luka Lorgnine cisoide

$$(x^2 + y^2)^2 = x^3,$$

što je Bošković nakanio provesti u *Memorietti*, vodila je prema eliptičkim integralima, odnosno, kako se Bošković izrazio, prema »formulama koje se sastavljaju pri rektifikaciji« elipse i hiperbole.[46] U tu se svrhu Bošković poslužio općom formulom za rješavanje integrala oblika:

$$\int \frac{dz\sqrt{f + gz^2}}{\sqrt{p + qz^2}},$$

a koju je formulu Riccati izložio u drugom svesku svog udžbenika *Institutiones Analyticae* (1767).[47] On priopćuje Lorgni da je malo izmijenio Riccatijev postupak, uvjeren da se tako postiže jednostavnije rješenje.[48] Bošković je pritom proučavao transformaciju eliptičkog integrala zamjenom varijablâ, što je postupak u kojem je dragocjeni napredak postigao Euler 1759. i 1765. godine, da bi Legendre u svom spisu *Mémoire sur les transcendantes elliptiques* (1793) sveo integrale te vrste na najmanji broj kanonskih oblika.[49] To znači da i Boškovića, unatoč skromnu prinosu, valja uvrstiti u niz matematičara koji su u razdoblju 1740–1845. tumačili eliptičke integrale uz pomoć rektifikacije stanovitih krivulja, osobito čunjosječnicâ.

Uloga infinitezimalnog računa u razvoju matematike

Boškovićev odnos prema Riccatijevu udžbeniku *Institutiones Analyticae* očituje i stav profesora matematike u Pavli prema infinitezimalnom računu i razvoju matematike. To na osobit način otkriva prepiska s Giovanom Stefanom Contijem, Boškovićevim privrženim učenikom iz Lucce, unutar koje se Bošković mogao slobodnije, katkad i opuštenije, izraziti o Riccatijevu analitičkom instrumentariju, nego što je to sebi smio priuštiti u prepisci s Antonom Marijom Lorgnom, uglednim profesorom matematike iz Verone. Kad ga je Conti u pismu upitao što misli o prvom svesku Riccatijeva udžbenika, on je na temelju usmenih obavijesti o objavljenom djelu, dakle prije nego ga je imao u rukama, zapisao ovo mišljenje krajem 1767. godine:

»*A priori*, stvar mora biti jako dobra, jer čovjek prekrasno zna [infinitezimalni] račun. (...) A ujedno čujem da nedostaje red i jedinstvo misli. Dijelom ga je uradio on, dijelom je prepustio uraditi svom učeniku zemljaku, dijelom drugima. Odatle mora potjecati i raznolikost stilova. Jedna mi se druga stvar baš ne sviđa u njegovim stvarima: nimalo se ne brine o stanovitoj eleganciji koju držim najbitnijom u geometrijskim stvarima.«[50]

Nova Contijeva pitanja o otvorenim problemima u matematici, što su prispjela neposredno po završetku *Memoriette*, ponukala su Boškovića na razmišljanje o razvoju matematike:

»Glede onoga što me pitate uvjeren sam da će se najbolje raditi u vrijeme pronalazaka drugih metoda o kojima mi ne posjedujemo ni zamišljaj, a s kojima će se vrlo lako rješavati oni problemi koji su nama nesavladivi. Koliki su problemi, koji su prije nadmašivali sve sile velikih geometričara, postali šala za početnike nakon što je Descartes primijenio račun na geometriju! On poslije nazva mehaničkima te krivulje koje mi sada nazivamo transcendentnima, te po-

44
Ruđer Bošković Antonu Mariji Lorgni, Pavia, 24. svibnja 1768., u Boscovich, *Lettere ad Anton Maria Lorgna 1765–1785*, pp. 55–56, na p. 55: »Esso [= il compimento della Memorietta] contiene la quadratura, e la rettificazione. Massime questa seconda è presa per le vie di calcolo; ma vedra, quanto ajuti la geometria per arrivare subito alle formolette semplici, e maneggiare queste coll'analisi, vedrà quanto giova per ricavarne delle costruzioni eleganti. Questa eleganza è quella che a me piace sopratutto nelle cose geometriche, e che in oggi si trascura forsi troppo, e a torto. Mi ci sono applicato in questa Memorietta, perche mi puo servire, per esercitare i miei scolari in questa eleganza.«

45
Ruđer Bošković Giovanu Stefanu Contiju, Pavia, 22. svibnja 1768., u Ruggiero Giuseppe Boscovich, *Lettere a Giovan Stefano Conti*, a cura di Gino Arrighi (Firenze: Leo S. Olschki, 1780), pp. 295–297, na p. 295: »qualche altra scuola privata, una Memorietta di certe coserelle elementari affatto geometriche, e analitiche, ma dell'ultima eleganza, di cui mando questa sera il compimento ad un Professore di Matematica, che ha stampato su quell'argomento.«

46
Boscovich, »Memorietta«, n. 60, p. 68: »La prima di queste due formole facilmente si costruisce alla rettificazione dell'ellisse, e la seconda a quella dell'Iperbole:«; n. 65, p. 69.

47
Boscovich, »Memorietta«, n. 56, p. 67: »Svolgerò qui la prima preparandola per la integrazione, e costruzione col metodo delle Istituzioni Analitiche del P. [Vincenzo] Riccati proposto al capo 12 del lib. 1, tom. 2 per la sua formola generale (...)«; uz dva ispravka u transliteraciji prema faksimilu rukopisa »Memoriette« na p. 62.

48
Ruđer Bošković Antonu Mariji Lorgni, Pavia, 24. svibnja 1768., u Boscovich, *Lettere ad Anton Maria Lorgna 1765–1785*, p. 55: »Nel mio caso la costruzione riesce così assai piu semplice.«

49
Vidi Christian Houzel, »Elliptische Funktionen und Abelsche Integrale«, u Jean Dieudonné (ed.), *Geschichte der Mathematik 1700–1900: Ein Abriß* (Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1985), pp. 422–540, osobito poglavlje »Reduktion der elliptischen Integrale auf die kanonische Form«, pp. 432–438.

50
Ruđer Bošković Giovanu Stefanu Contiju, Milano, 8. prosinca 1767., u Boscovich, *Lettere a Giovan Stefano Conti*, pp. 274–277, na pp. 275–276: »*A priori* deve essere cosa assai buona; perche l'uomo sa il calcolo a maraviglia: (...) ma insieme sento, che manca d'ordine, ed union di pensiero: parte ha fatto esso, e parte ha lasciato fare al suo scuolare loro patriotto, parte ad altri: onde vi deve essere anche diversità di stili. Un altra cosa a me dispiace assai nelle sue cose: non cura punto certa eleganza, che io stimo essenzialissima nelle cose Geometriche, (...)«

vjerova da nije bilo sredstva da bi ih obradio. Infinitezimalni račun, koji je otkrio ili sâm Newton, ili on i Leibniz, otvorio nam je vrlo široko polje. S računom se posjeduju sva svojstva tih krivulja i rješava se jedan svijet problemâ koji su prije zahtijevali sveske, a sada se prispije u malo crta, te ih je vrlo mnogo koji su prije bili nedostupni. Ovaj je račun bio vrlo plodnim rudnikom, no držim da smo sada već pri kraju njegovih ogranaka. Toliki veliki umovi, ondje izgubljeni, jedva nalaze nekoji prikrajak žilice uvučene ovdje i ondje među stijenama. Velike su žile, držim, iscrpene. Ali otkrit će se neki drukčiji rudnik, k tomu i rudnik nepoznatih kovina, ali ništa manje prikladnih, dapače možda prikladnijih u nevolji i u obilju, o kojem rudniku mi sada nemamo zamišljaj ni neizravan ni nesavršen, kao što onaj koji je rođen u narodu slijepaca ne bi imao zamišljaj ni o nazivu bojâ.«[51]

Prema Boškovićevu uvidu, odnos između problema i metode ključan je za razvoj matematike, a osobito je prepoznatljiv u pronalasku analitičke geometrije i infinitezimalnog računa. Upravo je za infinitezimalni račun Bošković upotrijebio upečatljivu metaforu »rudnik« (*la miniera*), a ne metaforu »zdanje« (*aedificium*) koju je pridijelio svojoj već izgrađenoj teoriji transformacijâ geometrijskih mjesta. Izgleda da je on takvim odabirom metafore htio upozoriti na to da infinitezimalni račun nema izgrađenu osnovu, odnosno da nije utemeljen s priželjkivanom strogošću. Je li Bošković imao pravo kad je 1768. godine »plodni rudnik« infinitezimalnog računa držao iscrpenim? Njegova metafora dopušta različite odgovore na to pitanje. Odgovor bi morao biti niječan ako se u cijelosti promotri razvojni put matematičke analize. A mogao bi biti potvrdan jedino ako se u jednoj od nepoznatih kovina, koje Bošković spominje, prepozna strogost u matematičkom dokazu što obilježuje djelo Augustina Cauchya, strogost koja je matematičkoj analizi u 19. stoljeću udahnula novi život, ali strogost koja te, 1768. godine zacijelo nije bila dosegnuta.

Infinitezimalna dionica Boškovićeve matematike

Odnos između proučavanog problema i upotrijebljene metode, kojim se Bošković poslužio i u opisu razvoja matematike, može poslužiti kao mjerilo za prosudbu njegova odnosa prema teoriji infinitezimalâ; to više što se u matematičkoj historiografiji ustalio bitni prigovor Boškovićevoj metodologiji u matematičkim istraživanjima, pa time i njegovu doprinosu matematici. Taj je prigovor najtrajnije odjeknuo u ocjenama što su ih o Boškoviću matematičaru izrekli J. F. Scott i Željko Marković. Scott je odmah na početku svog ogleda o Boškovićevu matematičkom djelu izjavio: »On je bio prije geometričar nego analitičar i uglavnom se bavio primjenom geometrijskih metoda u prikazivanju fizičkih pojava. One su obrađene i razvijene u njegovim dvama glavnim djelima *Elementa Universae Matheseos* (1754) i *Theoria Philosophiae Naturalis* (1763).«[52] Marković je, pišući natuknicu o Boškoviću za ugledni *Dictionary of Scientific Biography*, težio za većom jasnoćom u prosudbi Boškovićeve metodologije: »Umjesto infinitezimalnog računa, kako su ga razvili veliki analitičari među njegovim suvremenicima– d'Alembert, braća Bernoulli i Euler, on je prednost dao geometrijskoj metodi beskonačno malih veličina 'koju je Newton gotovo uvijek upotrebljavao', kako je govorio, i koja je utjelovila 'moć geometrije'. Napose ju je primjenjivao na probleme diferencijalne geometrije, nebeske i zemaljske mehanike i praktične astronomije.«[53] Sukladno tom stajalištu, među svim Boškovićevim matematičkim rezultatima poslije 1743. godine spomenuo je samo »izvornu teoriju čunjosječnicâ« i »prvu teoriju o kombinaciji opažajâ utemeljenu na principu minimuma« apsolutnih vrijednosti pogrešaka pri mjerenju, a i to, što ne može izbjeći pozornu čitatelju, nije uradio u odsječku posvećenom apstraktnim znanostima.[54] Građa, koju sam ovdje izložio, utire put zaključcima koji se suprotstavljaju tim ocjenama.

Suočen s odabirom matematičke metode u počecima svoje profesure u Rimskom kolegiju, Bošković se dvoumio između usvajanja učinkovite i točne infinitezimalne metode i ustrajnog njegovanja euklidskog ideala.[55] Zato je, potaknut uz to izgradnjom teorije silâ i teorije transformacijâ geometrijskih mjesta, nakanio izgraditi jednu teoriju infinitezimalâ i izložiti je u planiranu četvrtom svesku svoga matematičkog udžbenika *Elementa universae matheseos*. Prema osnovnoj zamisli ta se teorija imala temeljiti na pojmu neprekinutosti krivulje, a nacrt njezina sadržaja doživljavao je dopune tijekom Boškovićevih matematičkih istraživanja u razdoblju 1741–1755. Istodobno se u tim istraživanjima očitovao metodički paralelizam iz matematičkih rasprava napisanih 1740. godine, pa je to neprestano odmjeravanje prikladnosti geometrijske i infinitezimalne metode, promotreno iz epistemološke perspektive, moglo biti razlogom što Bošković nikada nije napisao svoju teoriju infinitezimalâ. Pa ipak, on je više važnih matematičkih problema ili riješio s pomoću infinitezimalne metode ili ih je prosuđivao iz perspektive diferencijalnog računa:

(1) određivanje tijela koje s najvećom privlačnom silom djeluje na odabranu točku svoje osi (1743);

(2) uključivanje diferencijalne geometrije u nacrt teorije infinitezimalâ, osobito zbog proučavanja svojstava krivuljâ (1754);

(3) teorijski modeli za određivanje oblika Zemlje (1755);

(4) određivanje matematičkog oblika stanice pčelinjega saća (1760);

(5) opis uloge integralnog računa u izračunavanju srednje brzine tekućine (1765);

(6) rektifikacija Lorgnine cisoide uz rješavanje eliptičkih integrala, a na osnovi proučavanja Riccatijeva udžbenika iz matematičke analize (1768);

(7) četiri glavne diferencijalne jednadžbe sferne trigonometrije (1770).

51
Ruđer Bošković Giovanu Stefanu Contiju, Pavia, 22. svibnja 1768., u Ruggiero Giuseppe Boscovich, *Lettere a Giovan Stefano Conti*, pp. 295–297, na pp. 296–297.

52
J. F. Scott, »Boscovich's mathematics«, u Lancelot Law Whyte (ed.), *Roger Joseph Boscovich S.J., F.R.S., 1711–1787: Studies of his life and work on the 250th anniversary of his birth* (New York: Fordham University Press, 1961), pp. 183–192, na p. 183: »He was a geometer rather than an analyst, and he was mainly concerned with the application of geometrical methods to the representation of physical phenomena. These were elaborated and developed in his two major works, the *Elementa Universae* Matheseos (1754), and the *Theoria Philosophiae Naturalis* (1763).«

53
Željko Marković, »Bošković, Rudjer J.«, u Charles Coulston Gillispie (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. 2 (New York: Charles Scribner's Sons, 1970), pp. 326–332, na p. 330: »Instead of the calculus as developed by the great analysts among his own contemporaries – d'Alembert, the Bernoullis, and Euler – he prefered the geometric method of infinitely small magnitudes 'which Newton almost always used,' as he said, and which embodied the 'power of geometry.' He particularly applied it to problems of differential geometry, terrestrial and celestial mechanics, and practical astronomy.«

54
Marković, »Bošković, Rudjer J.«, pp. 326 i 330.

55
Vidi potanje u Martinović, »Bošković's choice of method at the beginning of his mathematical career«, osobito u odsječku »Accuracy of infinitesimal method and Euclidean ideal«, pp. 64–67.

Usporednu potragu za geometrijskim i analitičkim rješenjem problema Bošković je primjenjivao u dugom razdoblju 1743–1770., a to znači i kao mladi profesor matematike u Rimskom kolegiju, i kao ugledni znanstvenik za studijskog boravka u Parizu (1760), i kao reformator matematičkog studija na Sveučilištu u Pavìi, i kao ravnatelj zvjezdarnice u Breri. U svojim rimskim počecima držao je da narav problema utječe na odabir matematičke metode. Nakon toga, poslije geodetskih mjerenja od Rima do Riminija, infinitezimalno je rješenje doživljavao kao dodatnu potvrdu za točnost rješenja dobivenoga geometrijskom metodom. U pismima Lorgni i Contiju u razdoblju 1767–1768. pozivao se Bošković na eleganciju kao najvažniju odrednicu geometrijskog dokaza, te na njezinu pedagošku vrijednost. U prepisci s Lorgnom 1768. godine, tijekom predavanjâ iz matematike u Pavìi, svoju je temeljnu dvojbu glede izbora matematičke metode riješio tvrdnjom da je infinitezimalna metoda primjerenija za rješavanje složenijih i općenitijih problema od geometrijske metode. »Moć više analize« postala je napokon važnijom od geometrijske »elegancije«. Pri kraju te zanimljive evolucije u matematičkoj metodologiji Bošković je područje primjene infinitezimalne metode opisao kao rudnik kojemu su glavne žile iscrpene.

Zbog svega toga nije opravdano, kao što je to uradio Scott, izreći ocjenu o Boškovićevu izboru matematičke metode samo na temelju njegova matematičkog udžbenika i sinteze njegove filozofije prirode, niti je primjereno područje njegova matematičkog interesa suziti na primjenu geometrije u fizici. Ni Markovićeva ocjena, da je Bošković prije svega njegovao geometrijski pristup karakterističan za Newtonovo remek-djelo *Principia*, ne može se protegnuti na cjelokupni Boškovićev doprinos apstraktnim znanostima. Takva je ocjena neizravno osporena kad je nedavno istraživan Boškovićev stav glede prijepora o inverznom problemu središnjih silâ. Prema istančanoj metodološkoj analizi Boškovićeve rane rasprave *De motu corporis attracti in centrum immobile viribus decrescentibus in ratione distantiarum reciproca duplicata in spatiis non resistentibus* (*O gibanju tijela privučenoga u nepokretno središte silama koje padaju obratno razmjerno kvadratu udaljenosti u prostorima bez otpora*, 1743) što su je proveli S. Di Sieno i M. Galuzzi,[56] onaj tko u prvoj polovici 18. stoljeća slijedi Newtona, traži rješenje problema geometrijskom metodom, a tako je postupio Bošković. Tko pak slijedi Johanna Bernoullija, koji je i pokrenuo prijepor napadom na Newtonov pristup, taj izabire analitičko rješenje, koje nije bolje rješenje, nego tek rješenje drugom metodom. Krajem 18. stoljeća, zaključuju s pravom talijanski povjesničari znanosti, takva ocjena više ne vrijedi jer tada geometrijski pristup postaje zastarjelim. Već ustaljenoj ocjeni o Boškoviću kao *isključivom* geometričaru proturječi njegovo matematičko djelo u kojem se ne smiju zanemariti ove četiri sastavnice:

(1) osnovna zamisao i kratki pregled sadržaja njegove teorije infinitezimalâ, izloženi u mnogim najavama četvrtog sveska njegova matematičkog udžbenika (1741–1755);
(2) poticaji iz primijenjenih istraživanja, primjerice iz geodezije i hidromehanike, koji su upućivali na uporabu infinitezimalne metode (1755, 1765);
(3) problemi za koje je Bošković pronašao rješenja uz pomoć infinitezimalne metode (1743, 1760, 1770);
(4) problemi koji su Boškovića potaknuli na prosudbe o moći i eleganciji infinitezimalne metode (1765, 1768, 1770).

Ivica Martinović

Bošković's unrealized theory of infinitesimals: Between framework of the theory and application of the method

Faced up to the challenge of the choice of mathematical method at the beginning of his professorship at the Collegium Romanum, Ruđer Bošković hesitated between the acceptance of the efficient and accurate infinitesimal method and persistent cherishing the Euclidean ideal. Therefore, also having induced by the construction of his theory of forces and theory of the transformations of geometric loci, he intended to construct a theory of infinitesimals and exposed it in the planned fourth volume of his mathematical textbook. According to Bošković's basic conception, this theory should be found on the concept of continuity of geometric curve, and the »draft« of its content underwent supplements during Bošković's mathematical investigations in the period 1741–1755. At the same time, his mathematical investigations manifested a certain methodical parallelism, present still in his mathematical treatises from 1740. From epistemological point of view, Bošković's permanent discussion about the suitableness of geometric or infinitesimal method for solving a mathematical problem could cause that the framework of his theory of infinitesimals was never realized. However, Bošković solved several important mathematical problems with the help of infinitesimal method or evaluated them in the perspective of differential calculus:

(1) determining of the solid of maximal attraction acting at a point of axis of this body (1743);
(2) insertion of the differential geometry in the framework of the theory of infinitesimals, particularly because of study of properties of curves (1754);
(3) theoretical models for determining shape of the Earth (1755);
(4) determining of the mathematical form of the cells of bees (1760);
(5) description of the role of integral calculus to calculate the medium velocity of fluid (1765);
(6) rectification of Lorgna's cissoid solved by using elliptic integrals, after study of Riccati's textbook *Institutiones Analyticae* (1768);
(7) four general differential equations of spherical trigonometry, based on the differential changes of a spherical triangle within the project of the verification of astronomical instruments (1770).

Bošković applied the parallel search for the geometric and analytic solution of a mathematical problem in the long period 1743–1770, i. e. as a young professor of mathematics at the Collegium Romanum, as an outstanding scholar during his stay in Paris (1760), as a reformer of the study of mathematics at the University of Pavìa, and as founder of the Brera Observatory in Milan. At the beginning of his lectures of mathematics in Rome he

56 S. Di Sieno e M. Galuzzi, »Il 'De motu' di R. J. Boscovich (1743)«, *Dijalektika* 23 (1988), pp. 59–67; S. Di Sieno and M. Galuzzi, »The *De motu* (1743) of R. G. Boscovich«, u Michele Bossi and Pasquale Tucci, *Bicentennial commemoration of R. G. Boscovich, Milano, September 15–18, 1987: Proceedings* (Milano: Unicopli, 1988), pp. 107–119.

concluded that the nature of a problem influenced the choice of mathematical method. After measurement of the meridian arc from Rome to Rimini (1750–1752), the infinitesimal solution served him as an additional confirmation of the exactness of the geometric solution. In letters to Anton Maria Lorgna and Giovan Stefano Conti (1767–1768), Bošković pointed out the elegance as the most essential thing in geometric proof and its pedagogical meaning. In the correspondence with Anton Maria Lorgna in 1768, when he held lectures in Pavìa, Bošković solved his fundamental methodological dilemma with the assertion that the infinitesimal method was more appropriate for solving more complex and more general problems than geometric method. The »power« of high analysis became finally more important than the »elegance« of geometry. At the end of this exciting evolution in mathematical methodology, Bošković described the realm of application of the infinitesimal method as the mine (*la miniera*) in which the main veins were exhausted already.

Contrary to evaluations of Bošković's mathematics by J. F. Scott (1961) and Ž. Marković (1970), it should not be neglected the following component parts in mathematical work of Ruđer Bošković:

(1) the basic idea and the short content of his theory of infinitesimals, exposed in many announcements of the fourth volume of his mathematical textbook *Elementa universae matheseos* (1741–1755);

(2) impulses from the applied investigations, e. g. from geodesy and hydrodynamics, that included the use of infinitesimal method (1755, 1765);

(3) problems Bošković solved with the help of infinitesimal method (1743, 1760, 1770);

(4) problems Bošković induced to evaluate »power« and »elegance« of infinitesimal method (1765, 1768, 1770).